

Capítulo 2

Cor

Uma imagem é definida, em última análise, pela cor dos seus pontos. Surge aí o primeiro problema: o que é cor? Embora seja um termo utilizado amplamente no cotidiano, é de difícil formalização. O paradigma dos quatro universos fornece a conceitualização necessária. No universo físico o fenômeno a ser estudado é a luz que corresponde, no universo matemático, a um modelo que descreve o fenômeno luz adequadamente. Já no universo de representação existem esquemas que fornecem uma representação finita para o modelo adotado, conforme pode ser visto na figura 2.1.



Figura 2.1: Modelo Conceitual.

2.1 Modelo Espectral de Cor

Voltando ao paradigma dos quatro universos, do ponto de vista físico, a sensação de cor é produzida por uma radiação eletro-magnética que chega até aos nossos olhos. Esta radiação pode ser modelada matematicamente por uma função, chamada de função de distribuição espectral, que associa a cada comprimento de onda presente na radiação¹, o valor de alguma grandeza radiométrica (em geral energia radiante). Assim, do ponto de vista matemático, cor é uma função. Neste caso, o universo matemático é constituído pelo conjunto D de todas as funções de distribuição espectral:

$$D = \{f : U \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+\}.$$

¹Newton foi o primeiro pesquisador a mostrar que a luz branca possui energia em todos os comprimentos de onda do espectro visível.

2.2 Sistemas Físicos de Cor

O olho humano é um sistema físico de processamento de cor. Em particular, trata-se de um sistema refletivo, pois faz uma amostragem em três faixas do espectro. Existem, em contrapartida, sistemas emissivos que fazem o inverso, ou seja, reconstróem a cor. Generalizando um pouco mais, em geral, um sistema refletivo possui um número finito de sensores, s_1, s_2, \dots, s_n , que fazem a amostragem em n faixas do espectro. Matematicamente, este fato é expresso da seguinte forma:

$$C(\lambda) \rightarrow (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad c_i = \int_0^{+\infty} C(\lambda) s_i(\lambda) d\lambda,$$

onde $s_i(\lambda)$ é a função de resposta espectral do i -ésimo sensor (fig. 2.2).

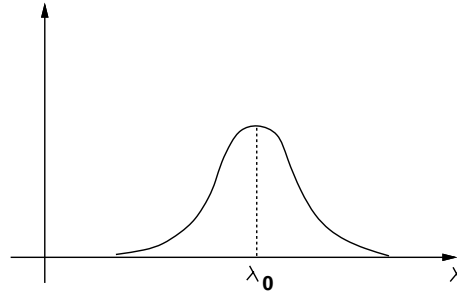


Figura 2.2: Função de Resposta Espectral Típica de um Sensor.

A amostragem ideal é aquela na qual a resposta dos sensores é um impulso:

$$s_i(\lambda) = \infty \text{ se } \lambda = \lambda_i \text{ ou } 0 \text{ se } \lambda \neq \lambda_i.$$

Neste caso, $c_i = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda) \delta(\lambda - \lambda_i) d\lambda = C(\lambda_i)$.

Um sistema emissivo é responsável pela reconstrução da cor, a partir de emissores que emitem luz com uma certa distribuição espectral. Assim, se os emissores são caracterizados por n funções de distribuição espectral $P_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots, P_n(\lambda)$, chamadas de base de primárias, tem-se que a cor reconstruída é dada por:

$$C_r(\lambda) = \sum_{k=1}^n c_k P_k(\lambda).$$

Para compreender melhor o processo de amostragem e reconstrução de cor, considere-se o que ocorre quando se utiliza uma câmara de televisão para captar uma imagem da natureza, que é então transmitida por tele-difusão. A luz que atinge a lente é focada, gerando uma imagem no tubo da câmara, e os circuitos eletrônicos da câmara fazem uma varredura da imagem, gerando um determinado número de linhas (que depende do padrão de vídeo adotado). A imagem é transmitida desta forma. As ondas são então captadas por

uma antena e o sinal original é reconstruído pelo monitor da televisão. A cor reconstruída é idêntica (perceptualmente) à cor original devido ao fenômeno do *metamerismo*, definido na próxima seção. A figura 2.3 ilustra o processo.



Figura 2.3: Amostragem e Reconstrução.

2.3 Representação Discreta de Cor

O espaço de todas as distribuições espectrais possui dimensão infinita. Para obter-se uma representação finita, ou seja, aproximar este espaço de dimensão infinita por um espaço de dimensão finita, é necessário fazer algum tipo de amostragem. Isto faz com que se utilize um vetor de dimensão finita na representação de uma função:

$$R : f \in D \rightarrow (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) \in \mathbb{R}^n.$$

Esta representação define uma transformação linear, pois: $R(af_1 + bf_2) = aR(f_1) + bR(f_2)$. É claro que este processo de amostragem acarreta em perda de informação (fig. 2.4) (a representação é ambígua, ou seja, um mesmo vetor pode representar mais de uma função).

Este tipo de representação é válida, no entanto, porque o problema de cor deve ser abordado do ponto de vista perceptual e não do ponto de vista físico (na realidade é um problema psico-físico). Em 1807, Young concluiu, a partir de experimentos, que o olho humano possui três tipos de receptores luminosos (células) que são mais sensíveis ao intervalo (da radiação) que corresponde aos comprimentos de onda na faixa do vermelho, verde e azul, respectivamente. Estes três tipos de receptores fazem uma amostragem da radiação nestes três comprimentos de onda. Desta forma, o espaço perceptual de cor é um espaço de dimensão finita (dimensão três). Isto significa que uma mesma sensação de cor pode ser obtida a partir de distribuições espectrais distintas, um fenômeno conhecido por metamerismo. Graças a isto a televisão produz imagens aceitáveis ao ser humano, uma vez que o conjunto de distribuições espectrais existentes na natureza é muito mais rico do que aquele que pode ser produzido artificialmente no monitor de uma televisão.

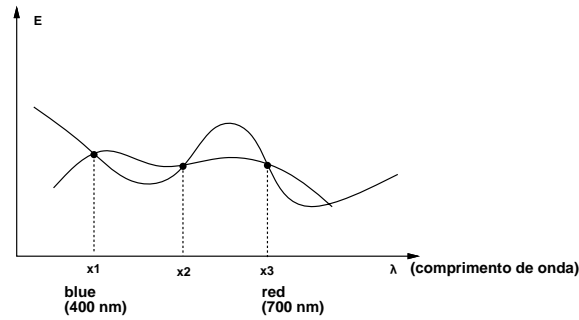


Figura 2.4: Representação Finita de duas Funções.

2.4 Espaços de Cor

Dada uma função de distribuição espectral $C(\lambda)$ (que corresponde a uma sensação de cor), um sistema emissivo com uma certa base de primárias $P_k(\lambda)$ e um sistema refletivo, como calcular as componentes na base de primárias de forma a que a cor reconstruída $C_r(\lambda)$ seja perceptualmente equivalente à cor original em relação ao sistema refletivo?

É possível mostrar que conhecendo-se a resposta espectral do sistema em cada comprimento de onda, obtêm-se as funções de reconstrução de cor $r_k(\lambda)$ (fig 2.5), que indicam as proporções nas quais as cores primárias devem ser combinadas para igualar a cor desejada.

Por definição, a resposta espectral do sistema é dada para um certo comprimento de onda pelas componentes, na base de primárias, da distribuição espectral conhecida como cor espectral (fig. 2.6), que é diferente de zero apenas neste comprimento de onda. Desta forma, tem-se que

$$C_r(\lambda) = \sum_{k=1}^n c_k P_k(\lambda), \quad c_k = \int_0^{+\infty} C(\lambda) r_k(\lambda) d\lambda.$$

A resposta espectral do sistema pode ser obtida experimentalmente. Para isto usam-se quatro emissores de luz. Os três primeiros correspondem às cores primárias e podem ter as intensidades controladas. O quarto emite a luz monocromática que se deseja igualar. Direcionando os três feixes de luz provenientes dos três emissores primários para um único ponto, e ajustando as suas intensidades até que, para um observador padrão, a cor resultante seja idêntica à cor do quarto emissor, obtêm-se as componentes da luz monocromática de teste em relação à base de primárias (fig. 2.7). Algumas cores não são igualadas, a menos que se adicione uma primária junto com a cor de teste. Matematicamente, isto corresponde a uma intensidade negativa.

Neste ponto o leitor já deve ter percebido que o objetivo é escrever uma dada cor como

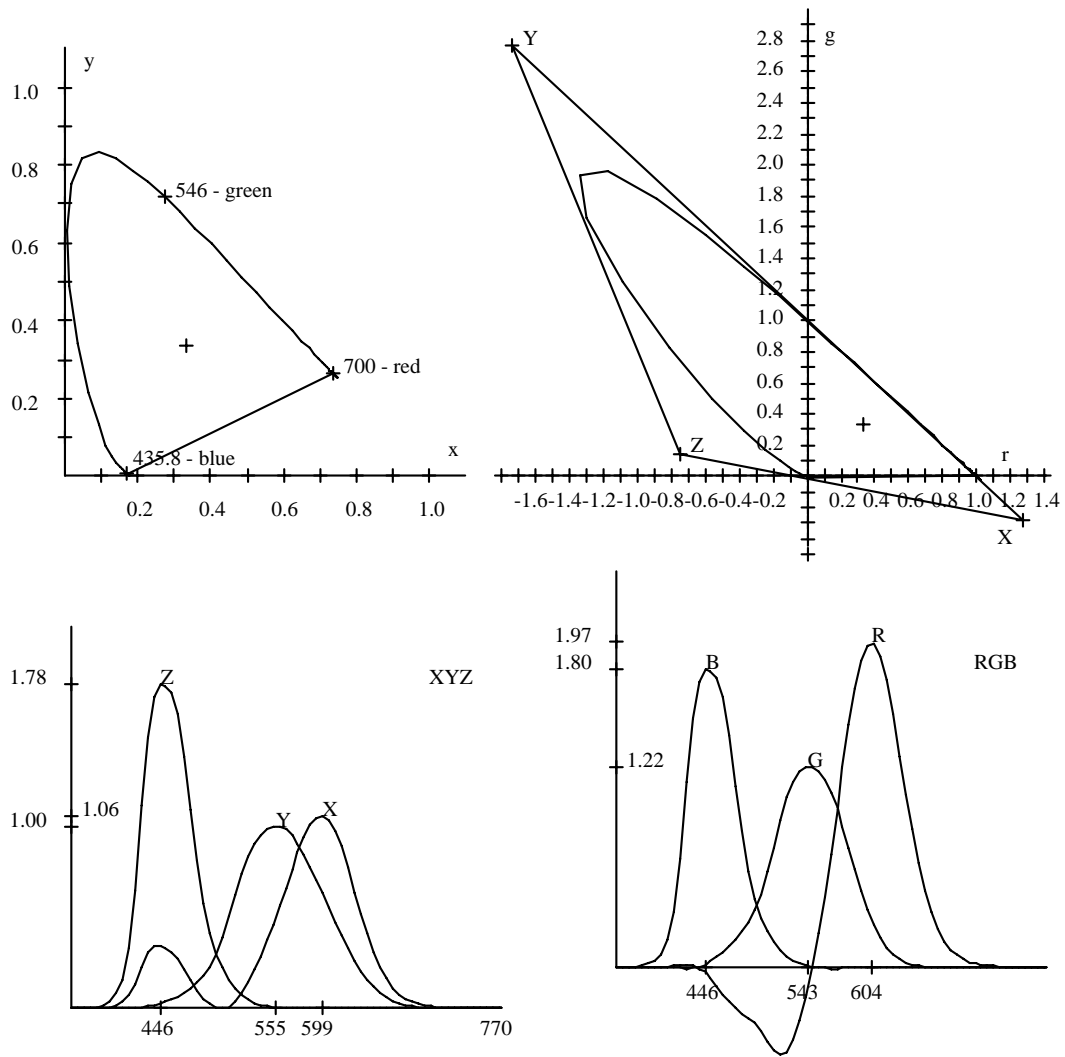


Figura 2.5: Funções de Reconstrução de Cor.

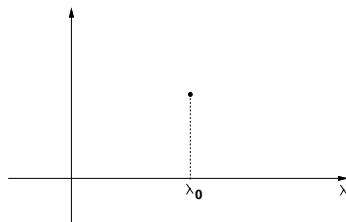


Figura 2.6: Cor Espectral.

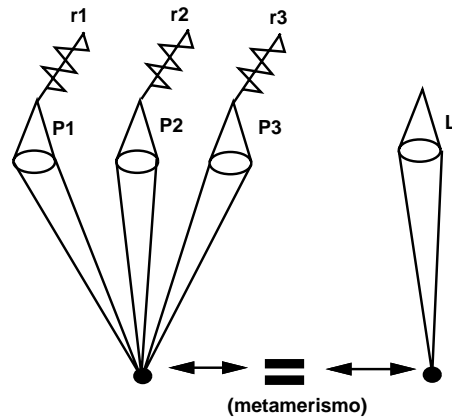


Figura 2.7: Obtenção Experimental das Funções de Reconstrução de Cor.

combinação linear das cores primárias². Voltando ao universo matemático, é fácil concluir que a multiplicação de uma função de distribuição espectral por um escalar positivo não altera a sensação de cor, mas apenas o que se costuma chamar de intensidade. Diz-se que a informação de croma foi preservada. Uma combinação convexa de duas distribuições espectrais ainda é uma distribuição espectral. Como a cada distribuição espectral corresponde um único ponto no espaço de cor, e a aplicação de representação (amostragem) nada mais é do que uma transformação linear, pode-se concluir que o espaço de cor é o espaço formado pelas retas que passam pela origem. Conclui-se então que o conjunto de todas as cores visíveis, chamado de sólido de cor, é um cone convexo.

- $C(\lambda)$ é cor visível $\Rightarrow t C(\lambda)$ é cor visível $\Rightarrow R(t C(\lambda)) = t R(C(\lambda))$.
- $C_1(\lambda)$ e $C_2(\lambda)$ são cores visíveis $\Rightarrow (1 - t) C_1(\lambda) + t C_2(\lambda)$, $t \in [0, 1]$, é cor visível $\Rightarrow R((1 - t) C_1(\lambda) + t C_2(\lambda)) = (1 - t) R(C_1(\lambda)) + t R(C_2(\lambda))$.

Um sistema físico não suporta intensidades arbitrariamente altas, pois os seus sensores são destruídos. Na prática, o que se faz é trabalhar com uma representação normalizada de cor. Escolhe-se uma cor de referência, chamada de branco padrão (b_r, b_g, b_b) , e atribuem-se a ela as componentes $(1, 1, 1)$. Qualquer outra cor (c_r, c_g, c_b) têm as suas componentes normalizadas:

$$\left(\frac{c_r}{b_r}, \frac{c_g}{b_g}, \frac{c_b}{b_b} \right).$$

2.5 Diagrama de Cromaticidade

Uma forma de considerar apenas um representante em cada reta de cor é utilizar a projeção radial de um determinado ponto da reta sobre um plano. Maxwell utilizou o plano

$$x + y + z = 1$$

²Se as cores primárias pertencerem ao espectro visível, haverá, eventualmente, componentes negativas.

que, por este motivo, é chamado plano de Maxwell. Sabe-se que:

- As cores visíveis definem um sólido convexo de cor (um cone).
- A interseção do sólido de cor com o plano de Maxwell gera uma curva convexa (diagrama de cromaticidade).
- As cores espectrais correspondem a pontos na fronteira do diagrama de cromaticidade (por que?).

A projeção de uma cor sobre o plano de Maxwell produz as coordenadas de cromaticidade da cor (fig 2.8). O seu cálculo é imediato. Sejam (c_r, c_g, c_b) as coordenadas de uma cor c no espaço de cor. A reta que passa pela origem e por c é dada pelos pontos da forma:

$$\{p; p = tc, t \in \mathfrak{R}\}.$$

A projeção $c' = (c'_r, c'_g, c'_b)$ da cor c sobre o plano de Maxwell impõe que $c'_r + c'_g + c'_b = 1$. Em particular, tem-se que $t(c_r, c_g, c_b) = (c'_r, c'_g, c'_b)$ para algum t . Logo,

$$t(c_r + c_g + c_b) = c'_r + c'_g + c'_b = 1, \text{ ou } t = \frac{1}{(c_r + c_g + c_b)}.$$

Assim,

$$c'_i = \frac{c_i}{(c_r + c_g + c_b)}.$$

O diagrama de cromaticidade é obtido, então, projetando-se ortogonalmente, sobre o plano rg , a interseção do sólido de cor com o plano de Maxwell. O diagrama de cromaticidade é útil por permitir uma visualização padrão de um corte do sólido de cor. Baseado neste diagrama, pode-se definir um comprimento de onda dominante para qualquer cor c , traçando-se uma semi-reta com origem no ponto acromático $(1/3, 1/3, 1/3)$ e contendo c . A interseção da semi-reta com o bordo do diagrama de cromaticidade fornece, diretamente, o comprimento de onda dominante de c . O comprimento de onda dominante pode ser interpretado como correspondendo a uma cor pura (espectral) que se combinada com branco nas proporções apropriadas produz a cor c .

O conceito de cor complementar de uma cor c também pode ser definido de forma análoga. É uma cor que se misturada com a cor c nas proporções apropriadas produz branco ($\alpha c_1 + \beta c_2 = \text{cor acromática(Branco)}$). O ponto acromático deve estar contido no segmento de reta que une c à sua cor complementar (por que?).

2.5.1 Decomposição Luminância-Crominância

As coordenadas de cromaticidade captam a noção de cor propriamente dita. Juntamente com a informação de intensidade ou luminância, determinam unicamente qualquer cor. A luminância é, por definição, um funcional linear: $L : \zeta = \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$. Dada uma cor $c = (c_r, c_g, c_b)$, existem constantes l_r, l_g, l_b tais que $L(c) = l_r c_r + l_g c_g + l_b c_b$. Da linearidade vem que:

$$L(c + c') = L(c) + L(c') \text{ e } L(tc) = tL(c).$$

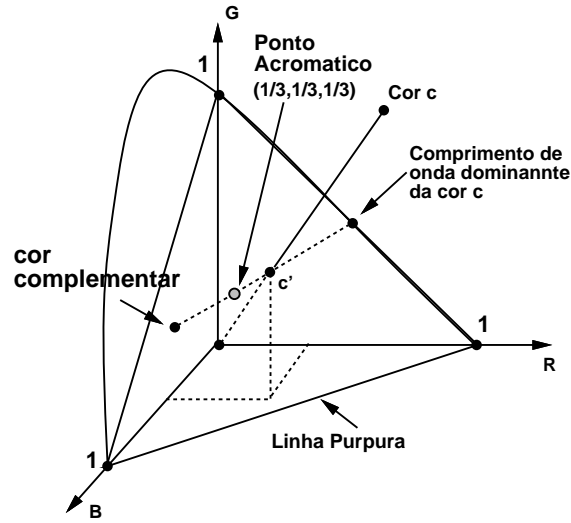


Figura 2.8: Diagrama de Cromaticidade.

Todo vetor de cor c pode ser escrito, de modo único, como soma direta de um vetor pertencente a $\ker(L) = \{c \in \mathfrak{R}^3 : L(c) = 0\}$ (núcleo de L) e de um vetor pertencente a um subespaço complementar de $\ker(L)$ — na forma $c = \ker(L) \oplus \ell$, $c = c_c + c_l$.

Sabe-se da álgebra linear que a dimensão do núcleo mais a dimensão da imagem de uma transformação linear $L : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ é igual a dimensão do domínio da transformação:

$$\dim(\ker(L)) + \dim(\text{Im}(L)) = n.$$

No caso presente, isto significa que a dimensão do núcleo do funcional de luminância é 2. Se duas cores têm a mesma luminância, $L(c_1) = L(c_2)$, conclui-se que c_1 e c_2 estão em um hiperplano afim $c_v = c_0 + v$, paralelo ao núcleo do operador de luminância (fig. 2.9):

$$L(c_1 - c_2) = 0 \Rightarrow c_1 - c_2 \in \ker(L).$$

Cada hiperplano afim paralelo ao núcleo do operador de luminância é chamado de um hiperplano de cromaticidade (luminância constante).

A decomposição em cromaticidade-luminância é de extrema importância na definição de diversos sistemas de coordenadas no espaço de cor.

Para finalizar, define-se um sólido de cor como sendo o conjunto de cores realizáveis em um espaço de cor e um mapa de cor como sendo uma curva no sólido de cor

$$\varphi : I \subset \mathfrak{R} \rightarrow S \subset \mathfrak{R}^3.$$

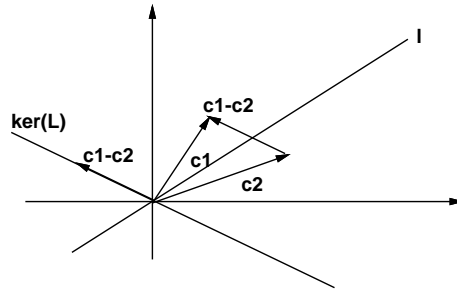


Figura 2.9: Decomposição Crominância-Luminância.

2.6 Luminância

Após a discussão sobre decomposição crominância-luminância, o leitor deve estar se perguntando o que é, afinal de contas, a luminância. Para compreender este conceito, suponha-se uma luz monocromática com potência constante de 1 watt. Será que a resposta do olho a este estímulo é linear, ou seja, perceptualmente, se variarmos o comprimento de onda, será que um observador padrão concluirá que as luzes tem brilho constante? A resposta é não. A resposta é máxima para comprimento de onda igual a 555 nm (faixa do verde). A figura 2.10 mostra a sensibilidade relativa do olho em função do comprimento de onda.

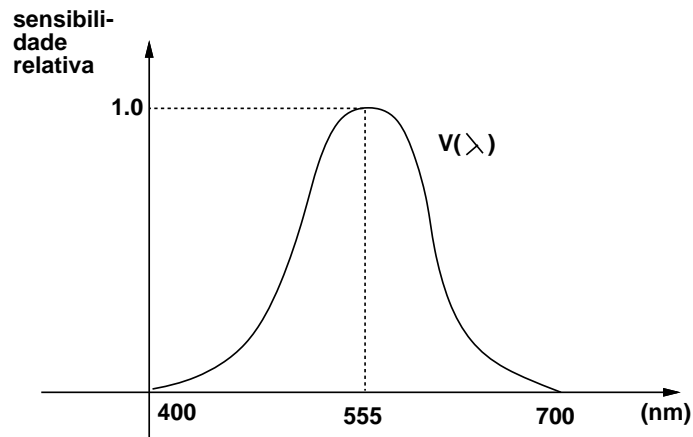


Figura 2.10: Curva de Sensibilidade Relativa.

Convencionou-se que uma luz monocromática com comprimento de onda igual a 555 nm e com 1 watt de potência produz 680 lumens . A constante $K(\lambda) = 680 V(\lambda) \text{ lm/w}$ permite converter de watts para lumens. Note-se então que a luminância³ é uma grandeza

³Luminância = $\text{lumens}/(\text{m}^2\text{Sr})$.

colorimétrica que corresponde aos termos perceptuais de brilho (para emissores) ou luminosidade (para refletores).

Se a luz não for monocromática, mas sim caracterizada por uma distribuição espectral $C(\lambda)$, tem-se que:

$$L(C(\lambda)) = K(\lambda) \int_0^{\infty} C(\lambda) V(\lambda) d\lambda.$$

Isto pode ser expresso em função da representação de C no sistema CIE⁴ -RGB por

$$L(C(\lambda)) = \langle L, c \rangle = \langle (0.177, 0.812, 0.0106), (c_r, c_g, c_b) \rangle .$$

2.7 Padrão CIE-XYZ

Para evitarem-se coordenadas de cromaticidade negativas (por que isto é importante?), foi criado um outro padrão de cor chamado de CIE-XYZ. As primárias deste sistema não estão contidas no sólido de cor justamente para que qualquer cor possa ser expressa, apenas com coordenadas positivas, como combinação linear das cores primárias. A conversão do sistema CIE-RGB para o CIE-XYZ é uma mera mudança de sistema de coordenadas.

Como foi criado o sistema CIE-XYZ? Definiu-se que duas cores primárias têm luminância zero (pertencem ao núcleo do operador de luminância). Traça-se então uma reta coincidente com o segmento (quase) retilíneo do diagrama de cromaticidade. A interseção desta reta com a reta de luminância zero (que passa pela origem e é perpendicular ao vetor $(0.176, 0.81)$) define a primária X . As duas outras primárias ficam definidas pelo traçado de uma segunda reta que é tangente ao diagrama de cromaticidade pela esquerda e que minimiza a área do triângulo formado pela reta de luminância zero, a reta anterior e esta reta. A primária Z está na reta de luminância zero e a Y no terceiro vértice do triângulo (fig. 2.5).

rgb	x	y	z	xyz	r	g	b
r	1.2750	-1.7395	-0.7431	x	0.73467	0.27376	0.16658
g	-0.2779	2.7675	0.1409	y	0.26533	0.71741	0.00886
b	0.0029	-0.0280	1.6022	z	0.00000	0.00883	0.82456

Tabela 2.1: Bases do CIE (vetores coluna).

Aqui talvez valha a pena reavivar a memória daqueles que não estão muito familiarizados com álgebra linear. Considere-se o seguinte problema: obter as coordenadas do objeto da figura 2.11 no sistema de coordenadas b).

2.7.1 Mudança de Sistema de Coordenadas

Uma mudança de sistema de coordenadas corresponde a uma transformação linear. Desta forma, basta que seja determinado como a transformação age nos vetores de uma base para que se tenha a transformação correspondente. Assim se $v = \sum a_i e_i$, $a_i \in \mathfrak{R}$, $v, e_i \in \mathfrak{R}^n$ ($\{e_i\}$

⁴Comission Internationale de Eclairage.

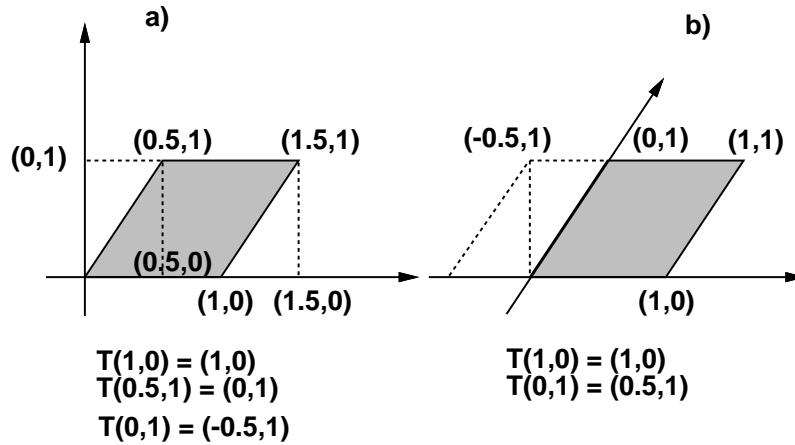


Figura 2.11: Mudança de Sistema de Coordenadas.

formam uma base), tem-se que $T(v) = T(\sum a_i e_i) = \sum a_i T(e_i)$. Este é o motivo pelo qual uma transformação linear pode ser representada por uma matriz (a matriz onde os vetores coluna representam os vetores da base já transformados).

No exemplo proposto $T(1,0) = (1,0)$ e $T(0.5,1) = (0,1)$, o que, na forma matricial, produz o seguinte sistema de equações:

$$\begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(v_1) & T(v_2) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema acima, obtêm-se: $a = 1$, $0.5a + b = 0$, $c = 0$, $0.5c + d = 1$, ou $T = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A transformação T leva do sistema de coordenadas a) para o sistema de coordenadas b), sendo denotada por T_{ab} .

A transformação $T_{ba} = T_{ab}^{-1}$ pode ser obtida pelo mesmo procedimento ou pela inversão da matriz correspondendo a T_{ab} . Deve-se notar que fixada uma base de vetores existe um sistema de coordenadas associado. A representação gráfica do sistema de coordenadas é feita, normalmente, utilizando-se um par de eixos perpendiculares, e não como foi apresentado no sistema b) da figura 2.11. Se os vetores representam alguma grandeza física, no caso presente cor, o sistema de coordenadas especifica em que proporções as grandezas correspondendo aos vetores da base devem ser combinadas para gerar qualquer outra grandeza representada por um elemento do espaço vetorial.

2.7.2 Sistema xyY

O diagrama de cromaticidade retira a luminância. Logo sensações de cores relacionadas com luminância não aparecem (por exemplo, marrom = vermelho-alaranjado com luminância muito baixa). Assim, ve-se que o diagrama de cromaticidade não é uma paleta de cores.

Há uma infinidade de planos no espaço XYZ que se projetam sobre o diagrama, perdendo a luminância nesse processo. Projetando uma cor no plano de Maxwell tem-se:

$$x = \frac{X}{X+Y+Z}, \quad y = \frac{Y}{X+Y+Z}, \quad z = \frac{Z}{X+Y+Z},$$

$$X = \frac{x}{y}Y, \quad y = Y, \quad Z = \frac{z}{y}Y \Rightarrow (X, Y, Z) = Y \left(\frac{x}{y}, 1, \frac{1-x-y}{y} \right).$$

As coordenadas xyY permitem que se faça uso do diagrama de cromaticidades na especificação de cores.

2.7.3 Mudança do Sistema $RGB \leftrightarrow XYZ$

A mudança do sistema RGB para o sistema XYZ não pode ser feita diretamente a partir da tabela 2.1 porque as coordenadas lá presentes são coordenadas de cromaticidade. Então procura-se uma matriz que represente a transformação apropriada:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r C_r & x_g C_g & x_b C_b \\ y_r C_r & y_g C_g & y_b C_b \\ (1-x_r-y_r)C_r & (1-x_g-y_g)C_g & (1-x_b-y_b)C_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} C_r R \\ C_g G \\ C_b B \end{pmatrix},$$

onde $C_r = X_r + Y_r + Z_r$; $C_g = X_g + Y_g + Z_g$; $C_b = X_b + Y_b + Z_b$.

Na realidade só dispõem-se das coordenadas xyz e precisa-se determinar o valor dos três escalares C_r, C_g, C_b , que escalam apropriadamente os vetores da base. É necessário então que se conheça o valor das coordenadas tricromáticas de um ponto. Normalmente, tem-se as coordenadas tricromáticas (X_w, Y_w, Z_w) do branco padrão de referência: $(R_w, G_w, B_w) = (1, 1, 1)$. Assim:

$$\begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} C_r \\ C_g \\ C_b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_r \\ C_g \\ C_b \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{pmatrix}.$$

Fazendo-se estas contas utilizando os dados da tabela 2.1 e considerando $(X_w, Y_w, Z_w) = (R_w, G_w, B_w) = (1, 1, 1)$, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.489989 & 0.310008 & 0.200003 \\ 0.176962 & 0.812400 & 0.010638 \\ 0.000000 & 0.009999 & 0.990001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.364666 & -0.896583 & -0.468083 \\ -0.515155 & 1.426409 & 0.088746 \\ 0.005203 & -0.014407 & 1.009204 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Note-se que o resultado é o esperado, por exemplo:

$$r_y = \frac{-0.896583}{-0.896583 + 1.426409 - 0.014407} = -1.7395226.$$

Este mesmo processo pode ser usado para fazer a mudança da base mRGB de um dispositivo para a base XYZ e vice-versa.

2.8 Sistemas de Cor

Um sistema de cor é o espaço de cor mais um sistema de coordenadas nele definido. Existem vários sistemas de cor. Uma classificação possível é a seguinte:

- Sistemas padrão;
- Sistemas dos dispositivos;
- Sistemas computacionais;
- Sistemas de interface.

2.8.1 Sistemas Padrão

Os sistemas padrão são aqueles homologados por alguma instituição normativa. Pode-se citar o sistema de cor CIE-RGB, criado em 1931, que fixa uma base de primárias composta pelas cores monocromáticas de comprimento de onda $700\text{ m}\mu$ (Red); $546\text{ m}\mu$ (Green) e $435.8\text{ m}\mu$ (Blue); o sistema CIE-CMY, que utiliza como primárias as cores complementares ciano (azul-piscina), magenta (violeta) e amarelo para simular um sistema subtrativo de cor (fig. 2.12); e o sistema CIE-XYZ, cuja base de primárias, chamadas X, Y e Z, está fora do espectro visível.

A principal finalidade de um sistema padrão é que, por ser independente de qualquer dispositivo físico, possibilita a mudança de coordenadas entre sistemas distintos e fornece uma maneira de armazenamento de imagens que independe de um dispositivo particular.

2.8.2 Sistemas dos Dispositivos

Os sistemas dos dispositivos são definidos pelas bases de primárias dos dispositivos. O gamute de um dispositivo (o conjunto de cores realizáveis pelo dispositivo) é um triângulo contido no diagrama de cromaticidade (por que?). Os sistemas dos dispositivos têm uma importância intrínseca porque, em última análise, são com eles que as imagens são reconstruídas. O espaço de cor de um dispositivo é um subconjunto do sólido de cor que, em geral, tem a forma de um paralelepípedo cujas faces são paralelogramos. Quando se efetua a mudança de coordenadas tem-se então um cubo (fig. 2.12).

2.8.3 Sistemas Computacionais

Os sistemas computacionais são sistemas utilizados tanto para síntese de imagens como no processamento de imagens. Podem ser, por exemplo, sistemas padrão, ou sistemas com alguma característica própria, tal como utilizar uma base com mais de três primárias.

2.8.4 Sistemas de Interface

Sistemas de cor baseados em espaços vetoriais são práticos do ponto de vista computacional, mas são muito ruins para serem usados na interface com o usuário. Os sistemas de interface objetivam oferecer uma interface adequada a especificação de cores por um usuário comum,

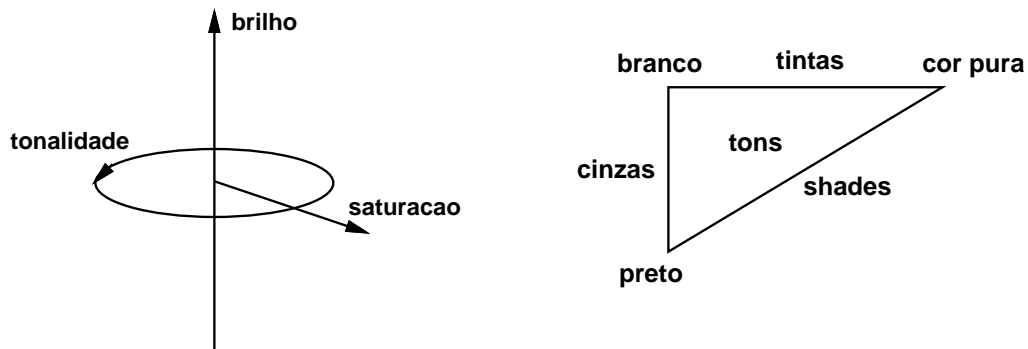
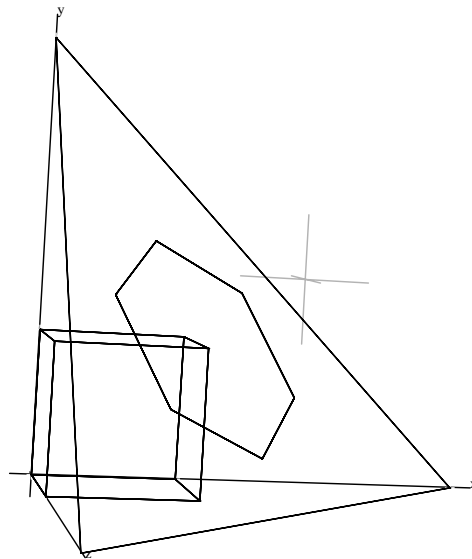


Figura 2.13: Paradigmas de Cor.

Figura 2.14: Projeção do Cubo RGB no plano $x+y+z=3$.

Este sistema de coordenadas não se baseia numa base de um espaço vetorial. Logo, a conversão do sistema HSV para o sistema RGB não é dada por uma transformação projetiva e conseqüentemente não pode ser representada por uma matriz. A coordenada valor de uma cor $c = (c_r, c_g, c_b)$ é definida como $\max(c_r, c_g, c_b)$ (fig. 2.15).

O sistema HSL (*Hue, Lightness, Saturation*) foi criado pela Tektronix e é muito parecido com o sistema HSV. Neste sistema o brilho é definido por $1/2(\max(c_r, c_g, c_b) - \min(c_r, c_g, c_b))$ (preto tem brilho 0 e branco brilho 1). O modelo geométrico do sistema HSL é um hexacone duplo.

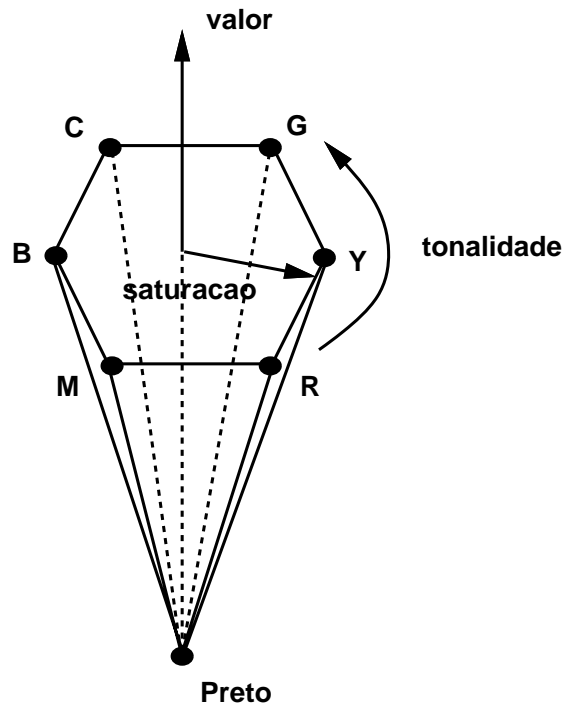


Figura 2.15: Sistema HSV.

Um atlas de cor é constituído por um número finito de amostras retiradas do espaço de cor. O sistema de Munsell (1915) obedece o critério de uniformidade perceptual e o sistema Pantone (1960) foi criado para ser usado no processo de impressão em papel pela indústria gráfica. Estes sistemas amostram as tonalidades; para cada tonalidade, amostram a saturação; e para cada saturação, amostram a luminância (fig. 2.16).

2.9 Exercícios

- 2.1** *O que é metamerismo? Dê exemplos de metamerismo em nosso cotidiano.*
- 2.2** *Defina o espaço espectral de cor.*
- 2.3** *Dê uma justificativa para mostrar que o espaço espectral de cor tem dimensão infinita.*
- 2.4** *Mostre que o sólido das cores visíveis é um conjunto convexo e apresente uma visualização 3D do sistema CIE-RGB.*
- 2.5** *Justifique por que as cores espectrais estão situadas no bordo do diagrama de cromaticidade.*

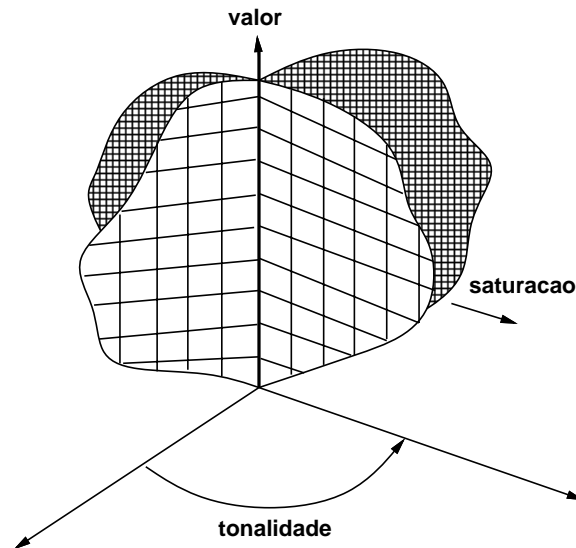


Figura 2.16: Sistema de Munsell.

2.6 Explique por que a chamada linha púrpura é a única parte retilínea do bordo do diagrama de cromaticidade.

2.7 Defina mapa de cor (computacionalmente e matematicamente) e crie um mapa de cor que contenha todas as cores espectrais.

2.8 Crie uma imagem para visualizar o mapa de cor do exercício anterior e discuta-a em relação à palavra todas.

2.9 Discuta a representação do diagrama de cromaticidade no computador e crie uma imagem do diagrama de cromaticidade do sistema CIE-XYZ.

2.10 Dê uma classificação dos sistemas de cor utilizados em Computação Gráfica, dando um exemplo de cada tipo de sistema.

2.11 Defina e dê uma descrição dos parâmetros perceptuais utilizados na escolha de cor no computador.

2.12 O sistema de interface HSV é definido a partir do sistema padrão RGB.

a) Exiba um algoritmo para a conversão de uma cor do sistema mRGB (RGB de um monitor) para o sistema HSV correspondente e outro para converter do sistema HSV para o mRGB.

b) Explique o princípio de funcionamento dos dois algoritmos.

c) Discuta as diferenças entre os dois sistemas.

d) Diga como pode ser feita uma interpolação entre duas cores no sistema HSV.

2.13 Dado um monitor com base de primárias com coordenadas de cromaticidade $R(0.628, 0.346)$, $G(0.268, 0.588)$ e $B(0.150, 0.070)$.

a) Mostre que a cor com coordenadas de cromaticidade $(0.274, 0.717)$ não pode ser exibida de modo preciso neste monitor.

b) Qual a denominação da cor do item anterior?

2.14 Considere o sólido de cor de um dispositivo gráfico e uma cor que não pode ser representada acuradamente neste dispositivo.

a) Quais são os tipos de situação que podem causar este problema.

b) Proponha métodos de aproximar esta cor no dispositivo.

c) Discuta os aspectos positivos e negativos de cada método proposto.

2.15 Calcule as coordenadas de cromaticidade de uma cor com coordenadas $C = (r, g, b)$.

2.16 Dado que a mistura de duas cores, segundo as leis de Grassman, pode ser calculada pela adição de suas coordenadas tricromáticas (X, Y, Z) e que os valores de cromaticidade (x, y, z) de uma cor são

$$x = \frac{X}{(X + Y + Z)}; \quad y = \frac{Y}{(X + Y + Z)}; \quad z = \frac{Z}{(X + Y + Z)} \quad \text{ou}$$

$$X = \frac{xY}{y}; \quad Y = Y; \quad Z = \frac{(1 - x - y)Y}{y},$$

determine as coordenadas de cromaticidade da mistura das três cores c_1, c_2, c_3 dadas no sistema CIE-xyY, respectivamente, por $(0.1, 0.3, 10.0)$, $(0.35, 0.2, 10.0)$, $(0.2, 0.5, 10.0)$.

$$T_1 = \frac{Y_1}{y_1}; \quad T_2 = \frac{Y_2}{y_2},$$

$$X_1 = (x_1 T_1, Y_1, (1 - x_1 - y_1) T_1),$$

$$X_2 = (x_2 T_2, Y_2, (1 - x_2 - y_2) T_2).$$

$$\begin{aligned} X_{12} = X_1 + X_2 &= (x_1 T_1 + x_2 T_2, Y_1 + Y_2, (1 - x_1 - y_1) T_1 + (1 - x_2 - y_2) T_2) \Rightarrow \\ X_{12_x} + X_{12_y} + X_{12_z} &= x_1 T_1 + x_2 T_2 + Y_1 + Y_2 + T_1 - x_1 T_1 - y_1 T_1 + T_2 - x_2 T_2 - y_2 T_2 \\ &= T_1 + T_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\Rightarrow x_{12} = \frac{x_1 T_1 + x_2 T_2}{T_1 + T_2}; \quad y_{12} = \frac{y_1 T_1 + y_2 T_2}{T_1 + T_2}; \quad Y_{12} = Y_1 + Y_2. \quad (2.2)$$

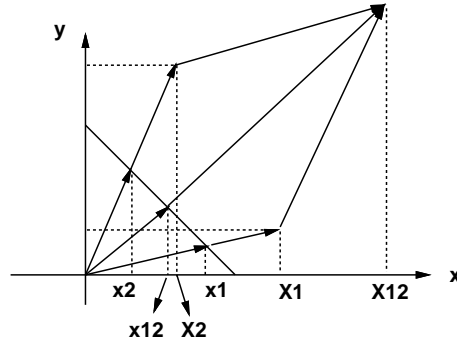


Figura 2.17: Combinação de Cores.

2.17 Dada uma cor $c_1 = (x_1, y_1, Y_1)$ e o ponto acromático $a = (a_x, a_y, 1)$ derive a fórmula para calcular a cor $c_2 = (x_2, y_2, Y_2)$ complementar de c_1 .

$$c_1 + c_2 = a \quad (2.2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 T_1 + x_2 T_2 = a_x (T_1 + T_2); \\ y_1 T_1 + y_2 T_2 = a_y (T_1 + T_2); \\ Y_1 + Y_2 = y_1 T_1 + y_2 T_2 = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

$$a_y (T_1 + T_2) = 1 \Rightarrow (T_1 + T_2) = \frac{1}{a_y} \Rightarrow T_2 = \frac{1}{a_y} - T_1.$$

$$x_2 = \frac{a_x (T_1 + T_2) - x_1 T_1}{T_2} = \frac{\frac{a_x}{a_y} - x_1 T_1}{\frac{1}{a_y} - T_1},$$

$$y_2 = \frac{a_y (T_1 + T_2) - y_1 T_1}{T_2} = \frac{1 - y_1 T_1}{\frac{1}{a_y} - T_1},$$

$$Y_2 = 1 - Y_1. \quad (2.4)$$

2.18 O comprimento de onda dominante de uma cor c é obtido, calculando-se a interseção da reta definida pelas coordenadas de cromaticidade de c e do ponto acromático com o bordo do diagrama de cromaticidade. Pela definição acima, alguns pontos contidos no diagrama de cromaticidade não têm comprimento de onda dominante no espectro visível.

a) Por que?

b) Proponha um esquema que permita representar o comprimento de onda dominante de um desses pontos, baseado no conceito de complementaridade.

2.19 Dados dois espaços tricromáticos de cor A e B com bases (A_1, A_2, A_3) e (B_1, B_2, B_3) , respectivamente, e a matriz $[a_{ij}]$ de mudança de base entre A e B .

a) Mostre como calcular as coordenadas (c_1, c_2, c_3) de uma cor c em A a partir de suas coordenadas em B .

- b) Sendo $rB_i(\lambda)$ as funções de reconstrução de cor associadas às primárias (B_1, B_2, B_3) , diga como podem-se obter as funções de reconstrução de cor $rA_i(\lambda)$ associadas às primárias (A_1, A_2, A_3) .
- c) Justifique os itens anteriores.

2.20 Considere o sistema de cor RGB do monitor (mRGB).

- a) Qual a geometria do sólido de cor desse sistema?
- b) Faça um esboço do sólido de cor.
- c) Considere as cores do sistema mRGB normalizadas para o intervalo $[0, 1]$. Defina o sistema de cores complementares CMY, correspondentes às cores primárias do sistema mRGB. Mostre que

$$C = 1 - R;$$

$$M = 1 - G;$$

$$Y = 1 - B.$$